→ Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

- $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$ (1)
- $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a \cdot \cos(-b) + \sin a \cdot \sin(-b) =$
  $= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ (2)

- $\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \overset{(1)}{=}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin(b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$ (3)

- $\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cdot \cos(-b) + \cos a \cdot \sin(-b) =$
  $= \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$ (4)

Εφαρμογή

$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

άρα $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

$$\bullet\ \tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$, \cos\alpha \neq 0$ κ' $\cos\beta \neq 0$ κ' $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$

$$\tan(\alpha-\beta) = \tan(\alpha+(-\beta)) = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\cdot\tan(-\beta)} =$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Τύποι διπλάσιου τόξου:

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ο παραπάνω τύπος γράφεται $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$.

Επίσης $\cos(2\alpha) = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Τύποι αποτετραγωνισμού:

$\cdot\ \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \boxed{\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$

$\cdot\ \cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}}$

Μετατροπή γινομένων σε αθροίσματα

· Αν προσθέσουμε τους τύπους (3), (4) κατά μέλη:

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cdot \cos b \iff$$

$$\boxed{2\sin a \cdot \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)} \quad (5)$$

· Αν προσθέσουμε τους τύπους (2), (1) κατά μέλη:

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b \iff$$

$$\boxed{2\cos a \cdot \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)} \quad (6)$$

· Αν αφαιρέσουμε τους τύπους (1), (2) κατά μέλη:

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \cdot \sin b \iff$$

$$\boxed{2\sin a \cdot \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)} \quad (7)$$

Μετατροπή αθροισμάτων σε γινόμενο και διαφορών

· Στον τύπο (5) θέτοντας $\left.\begin{array}{l} a+b = A \\ a-b = B \end{array}\right\} \iff a = \frac{A+B}{2},\ b = \frac{A-B}{2}$

$$\boxed{\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} \quad (8)$$

$$\sin A - \sin B = \sin A + \sin(-B) = 2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \iff$$

$$\boxed{\sin A - \sin B = 2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)} \quad (9)$$

Από τον τύπο (6) προκύπτει: $\boxed{\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}}$ (10)

$$\cos B - \cos A = 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \sin\frac{A-B}{2}$$

$$\Rightarrow \cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\left(-\sin\frac{A-B}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2} \sin\frac{B-A}{2}} \quad (11)$$

Εφαρμογές - Ασκήσεις.

α) Να εκφραστεί η ποσότητα $\cos^4 x + \sin^4 x$ συναρτήσει του $\cos(4x)$

β) Να λυθεί η εξίσωση $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{4}$ και $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{2}$

γ) Να λυθεί η " $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[2\pi, 3\pi]$

α) $\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4} + \frac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4} =$$

$$= \frac{2 + 2\cos^2(2x)}{4} = \frac{2 + 2\,\frac{1+\cos(4x)}{2}}{4} =$$

$$= \frac{3 + \cos 4x}{4}$$

β) $\cdot \cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3+\cos 4x}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos(4x) = -2$ αδύνατη.

$\cdot \cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3+\cos 4x}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3+\cos 4x = 2 \Leftrightarrow$

$\cos 4x = -1 \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\pi \Leftrightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Leftrightarrow$

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z}$

$\cdot 2\pi \leq x \leq 3\pi \Leftrightarrow 2\pi \leq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \leq 3\pi \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{4} \leq \frac{k}{2} \leq 3 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\frac{7}{4} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{4} \Leftrightarrow 3{,}5 \leq k \leq 5{,}5$

$k = 4, 5$

Άρα ~~x=~~ για $k=4$: $x = \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$

για $k=5$: $x = \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

Εφαρμογές – Ασκήσεις

· Να λυθεί η εξίσωση $\sin 6x \cdot \cos 3x = \sin 5x \cdot \cos 4x$

$\Leftrightarrow 2\sin 6x \cdot \cos 3x = 2\sin 5x \cdot \cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin(6x+3x) + \sin(6x-3x) = \sin(5x+4x) + \sin(5x-4x)$

$\Leftrightarrow \cancel{\sin(9x)} + \sin(3x) = \cancel{\sin(9x)} + \sin(x)$

$\Leftrightarrow \sin(3x) = \sin x \Leftrightarrow 3x = 2k\pi + x, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ ή

$3x = 2k\pi + \pi - x \Leftrightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Leftrightarrow$

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z}$

• Να λυθεί η εξίσωση

$\cos(5x) - \cos x = \sin 3x$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{5x+x}{2} \cdot \sin\frac{x-5x}{2} = \sin 3x \Leftrightarrow 2\sin 3x \cdot \sin(-2x) = \sin 3x \Leftrightarrow$

$2\sin 3x \cdot \sin(-2x) - \sin(3x) = 0 \Leftrightarrow \sin(3x)\left(2\sin(-2x) - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow$ ή $-2\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\sin 3x = \sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ ή $\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

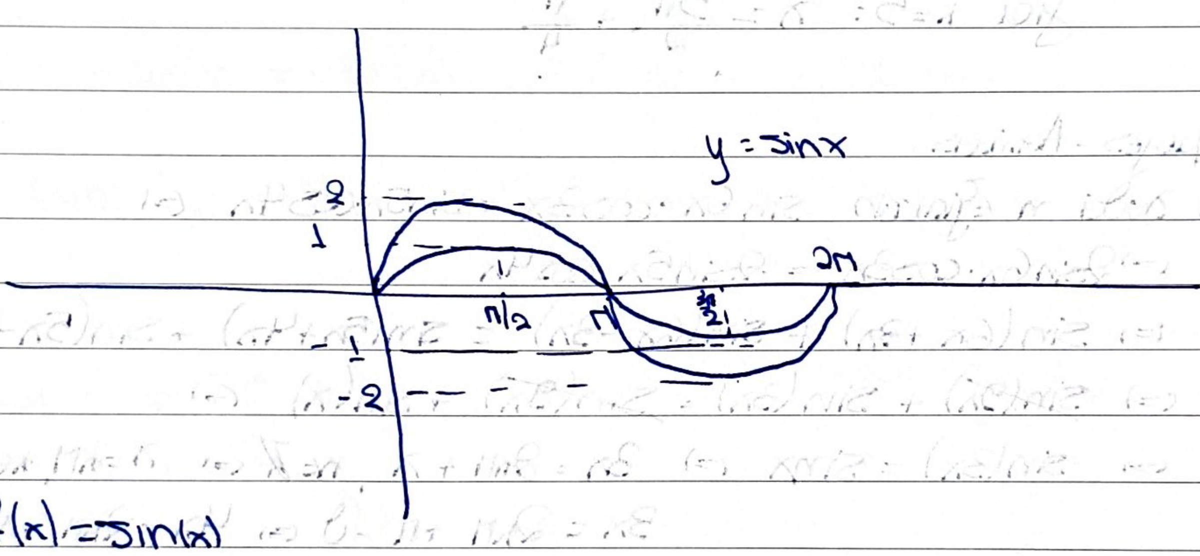
$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $\sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

ή $2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$

$3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ ή

$2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

09-10-2018



$f(x) = \sin(x)$

$g(x) = 2\sin x$